TAJEMNICE LICZB PIERWSZYCH

Katarzyna Matczak

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
FILIA W PŁOCKU
Płock 27.11.2020

Niech $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ będzie zbiorem liczb naturalnych.

Definicja

Liczbę naturalną p wiekszą od 1 *nazywamy* **liczbą pierwszą**, *jeżeli ma ona tylko dwa dzielniki* 1 *i p.*

Niech $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ będzie zbiorem liczb naturalnych.

Definicja

Liczbę naturalną p wiekszą od 1 nazywamy **liczbą pierwszą**, *jeżeli ma ona tylko dwa dzielniki 1 i p.*

Każdą liczbę naturalną większą od jedności, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Niech $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ będzie zbiorem liczb naturalnych.

Definicja

Liczbę naturalną p wiekszą od 1 nazywamy **liczbą pierwszą**, *jeżeli ma ona tylko dwa dzielniki 1 i p.*

Każdą liczbę naturalną większą od jedności, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**.

Liczby 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do liczb złożonych.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Podstawowe twierdzenie arytmetyki

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Twierdzenie

Każdą liczbę naturalna $n > 1$ nie będącą liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. Przedstawienia takie są jednoznaczne z dokładnoscią do kolejności czynników.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Podstawowe twierdzenie arytmetyki

Twierdzenie

Każdą liczbę naturalna $n > 1$ *nie będącą liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. Przedstawienia takie są jednoznaczne z dokładnoscią do kolejności czynników.*

Przykład

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Podstawowe twierdzenie arytmetyki

Twierdzenie

Każdą liczbę naturalna $n > 1$ nie będącą liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. Przedstawienia takie są jednoznaczne z dokładnoscią do kolejności czynników.

Przykład

$255 = 5 \cdot 51 = 5 \cdot 3 \cdot 17 = 3 \cdot 5 \cdot 17,$

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Podstawowe twierdzenie arytmetyki

Twierdzenie

Każdą liczbę naturalna $n > 1$ nie będącą liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. Przedstawienia takie są jednoznaczne z dokładnoscią do kolejności czynników.

Przykład

$255 = 5 \cdot 51 = 5 \cdot 3 \cdot 17 = 3 \cdot 5 \cdot 17,$
$5513 = 37 \cdot 149,$

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Podstawowe twierdzenie arytmetyki

Twierdzenie

Każdą liczbę naturalna $n > 1$ nie będącą liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. Przedstawienia takie są jednoznaczne z dokładnoscią do kolejności czynników.

Przykład

$255 = 5 \cdot 51 = 5 \cdot 3 \cdot 17 = 3 \cdot 5 \cdot 17,$
$5513 = 37 \cdot 149,$
$1011709 = 3761 \cdot 269.$

Oto początkowe, kolejne liczby pierwsze w uporządkowanym zbiorze liczb naturalnych:

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, \ldots$

Ile jest liczb pierwszych?

Ile jest liczb pierwszych?

Twierdzenie

W zbiorze $\mathbb{N}$ *liczb naturalnych istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Twierdzenie

W zbiorze $\mathbb{N}$ liczb naturalnych istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Dowód.

Dowód Euklidesa: Załóżmy, że istnieje skończona liczba liczb pierwszych. Zatem $p_1, \ldots, p_m$ są wszystkimi liczbami pierwszymi. Przyjmijmy $P = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m + 1$ i niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby P. Wtedy p nie może być żadną z liczb $p_1, \ldots, p_m$, gdyż w przeciwnym przypadku liczba $p = p_i$ dzieliłaby różnicę $P - p_1 \cdot \ldots \cdot p_m = 1$, co jest niemożliwe. Zatem p jest jeszcze jedną liczbą pierwszą, otrzymujemy sprzeczność z przyjętym założeniem. □

Dowód.

Dowód Kummera: Przypuśćmy, że liczb pierwszych jest tylko skończenie wiele: $p_1, \ldots, p_m$. Niech $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m > 2$. Ponieważ liczba $N - 1$ jest iloczynem liczb pierwszych, więc ma pewien czynnik pierwszy p_i wspólny z liczbą N; zatem p_i dzieli $N - (N - 1) = 1$, co daje sprzeczność. $\square$

Dowód.

Dowód Kummera: Przypuśćmy, że liczb pierwszych jest tylko skończenie wiele: $p_1, \ldots, p_m$. Niech $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m > 2$. Ponieważ liczba $N-1$ jest iloczynem liczb pierwszych, więc ma pewien czynnik pierwszy p_i wspólny z liczbą N; zatem p_i dzieli $N-(N-1)=1$, co daje sprzeczność. $\square$

Obecnie, największą znaną liczbą pierwszą jest

$$2^{82589933}-1,$$

ma 24862048 cyfr w rozwinięciu dziesiętnym. Odkrycia tej liczby, dokonał Patrick Laroche z Florydy w ramach projektu Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS).

Liczby Mersenne’a

Definicja

Liczby postaci $M_n = 2^n - 1$, gdzie n jest liczbą naturalną większą lub równą 2 nazywamy liczbami Mersenne’a.

Odkryta liczba $2^{82589933} - 1$ jest pięćdziesiątą pierwszą tzw. liczbą pierwszą Mersenne’a. Jednak nie każda liczba tej postaci jest pierwsza. Aby tak było, warunkiem koniecznym jest, aby n było również liczbą pierwszą. Warunek ten nie jest wystarczającym, ponieważ $M_{11} = 23 \cdot 89$. Zależność tę odkrył w XVII wieku francuski matematyk Marin Mersenne.

Liczby Fermata

Definicja

Liczbę całkowitą postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$*, gdzie* $n \in \mathbb{N}^+$*, nazywamy liczbą Fermata.*

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Definicja

Liczbę całkowitą postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$*, gdzie* $n \in \mathbb{N}^+$*, nazywamy liczbą Fermata.*

Hipoteza Pierre de Fermata:

Hipoteza

Każda liczba $F_n = 2^{2^n} + 1$ *jest liczbą pierwszą.*

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Liczby Fermata

Definicja

Liczbę całkowitą postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$, nazywamy liczbą Fermata.

Hipoteza Pierre de Fermata:

Hipoteza

Każda liczba $F_n = 2^{2^n} + 1$ jest liczbą pierwszą.

Liczby: $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$; $F_4 = 65537$ są liczbami pierwszymi.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Liczby Fermata

Definicja

Liczbę całkowitą postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$*, gdzie* $n \in \mathbb{N}^+$*, nazywamy liczbą Fermata.*

Hipoteza Pierre de Fermata:

Hipoteza

Każda liczba $F_n = 2^{2^n} + 1$ *jest liczbą pierwszą.*

Liczby: $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$; $F_4 = 65537$ są liczbami pierwszymi.
W roku 1752 Euler udowodnił, ze $F_5 = 641 \cdot 6700417$ dzieli się przez 641, zatem hipoteza Fermata nie jest prawdziwa.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Liczby Fermata

Definicja

Liczbę całkowitą postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$, nazywamy liczbą Fermata.

Hipoteza Pierre de Fermata:

Hipoteza

Każda liczba $F_n = 2^{2^n} + 1$ jest liczbą pierwszą.

Liczby: $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$; $F_4 = 65537$ są liczbami pierwszymi.
W roku 1752 Euler udowodnił, ze $F_5 = 641 \cdot 6700417$ dzieli się przez 641, zatem hipoteza Fermata nie jest prawdziwa.
W roku 1730 Christian Goldbach udowodnił, że:

Twierdzenie

Liczby Fermata dla $n \geqslant 0$ są parami względnie pierwsze.

Jak rozpoznać, czy liczba naturalna jest pierwszą?

Sito Eratostenesa

Sito Eratostenesa

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 .

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak rozpoznać, czy liczba naturalna jest pierwszą?

Sito Eratostenesa

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 .

2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 . . .

Sito Eratostenesa

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 ...
2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 ...
2 3 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43 47 49 ...

Sito Eratostenesa

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 ...
2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 ...
2 3 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43 47 49 ...
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 53 ...

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak rozpoznać, czy liczba naturalna jest pierwszą?

Sito Eratostenesa

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 ...

2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 ...

2 3 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43 47 49 ...

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 53 ...

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 ...

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak rozpoznać, czy liczba naturalna jest pierwszą?

Sito Eratostenesa

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 ...
2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 ...
2 3 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43 47 49 ...
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 53 ...
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 ...
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 ...

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak rozpoznać, czy liczba naturalna jest pierwszą?

Sito Eratostenesa

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 . . .
2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 . . .
2 3 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43 47 49 . . .
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 53 . . .
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 . . .
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 . . .
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 . . .

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak rozpoznać czy liczba naturalna jest pierwsza?

Jak rozpoznać czy liczba naturalna jest pierwsza?

Twierdzenie

Każda liczba złożona n ma dzielnik mniejszy lub równy $\sqrt{n}$.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak rozpoznać czy liczba naturalna jest pierwsza?

Twierdzenie

Każda liczba złożona n ma dzielnik mniejszy lub równy $\sqrt{n}$.

Małe twierdzenie Fermata

Twierdzenie

Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą, to $a^p \equiv a \pmod{p}$. *W szczególności, jeżeli p nie dzieli a, to* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak rozpoznać czy liczba naturalna jest pierwsza?

Twierdzenie

Każda liczba złożona n ma dzielnik mniejszy lub równy $\sqrt{n}$.

Małe twierdzenie Fermata

Twierdzenie

Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą, to $a^p \equiv a \ (mod\ p)$. *W szczególności, jeżeli p nie dzieli a, to* $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.

Twierdzenie Wilsona

Twierdzenie

Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

$$(p-1)! \equiv -1 \ (mod\ p).$$

Postulat Josepha Bertranda udowodniony w 1852 przez Pafnutija Czebyszowa:

Twierdzenie

Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ większej od lub równej 1 istnieje przynajmniej jedna liczba pierwsza większa od n i mniejsza lub równa $2n$.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Postulat Josepha Bertranda udowodniony w 1852 przez Pafnutija Czebyszowa:

Twierdzenie

Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ *większej od lub równej 1 istnieje przynajmniej jedna liczba pierwsza większa od* n *i mniejsza lub równa* $2n$.

Definicja

Dla dowolnej liczby naturalnej $x > 0$ *przez* $\pi(x)$ *oznaczymy liczbę takich liczb pierwszych* p, *że* $p \leqslant x$

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Funkcja $\pi(x)$

Postulat Josepha Bertranda udowodniony w 1852 przez Pafnutija Czebyszowa:

Twierdzenie

Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ większej od lub równej 1 istnieje przynajmniej jedna liczba pierwsza większa od n i mniejsza lub równa $2n$.

Definicja

Dla dowolnej liczby naturalnej $x > 0$ przez $\pi(x)$ oznaczymy liczbę takich liczb pierwszych p, że $p \leqslant x$

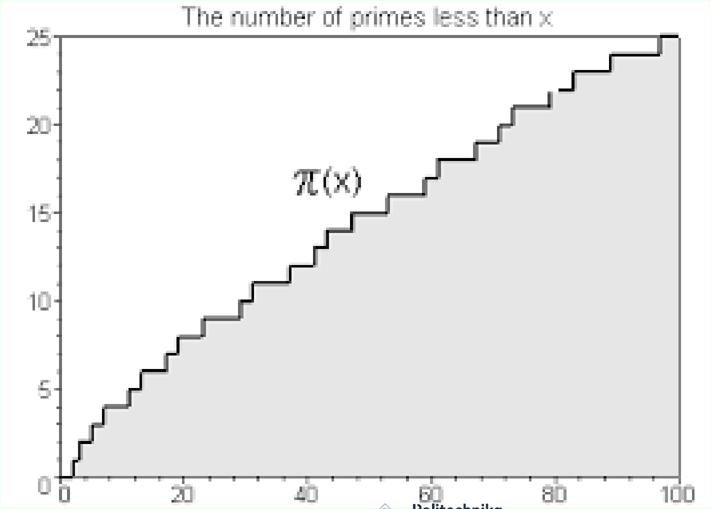
$$\pi(10) = 4,$$
$$\pi(100) = 25,$$
$$\pi(1000) = 168.$$

Własności funkcji $\pi(x)$:

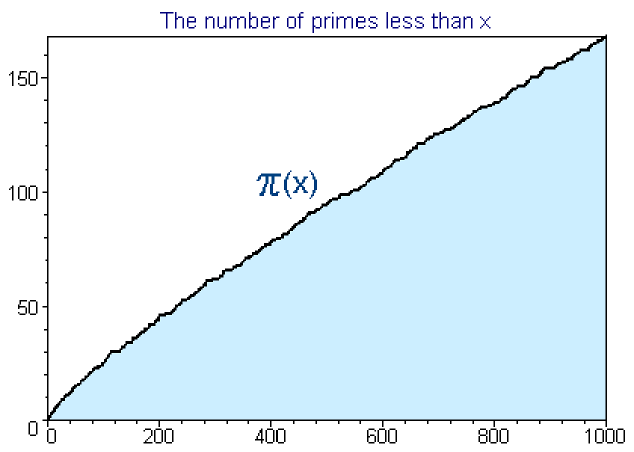
$$\forall_{n\in\mathbb{N}^+}\ \pi(2n) > \pi(n),$$

$$\forall_{n>5}\ \pi(2n)-\pi(n) \geqslant 2,$$
$$\forall_{n>8}\ \pi(2n)-\pi(n) \geqslant 3,$$
$$\forall_{n>14}\ \pi(2n)-\pi(n) \geqslant 4,$$
$$\forall_{n>20}\ \pi(2n)-\pi(n) \geqslant 5.$$

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU



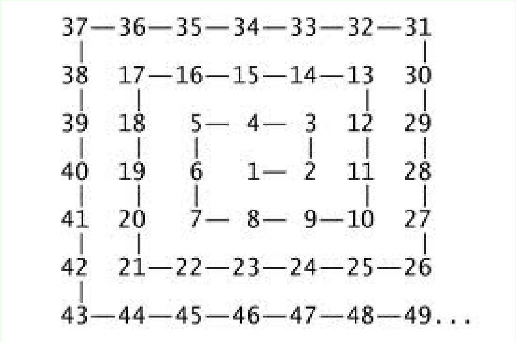
Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU



Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

x	$\pi(x)$	$x/\pi(x)$	*przyrost*
10	4	2,5	2,5
100	25	4	1,5
1000	168	6	2
10000	1 229	8,1	2,1
100000	9 592	10,4	2,3
1000000	78 498	12,7	2,3
10000000	664 579	15	2,3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

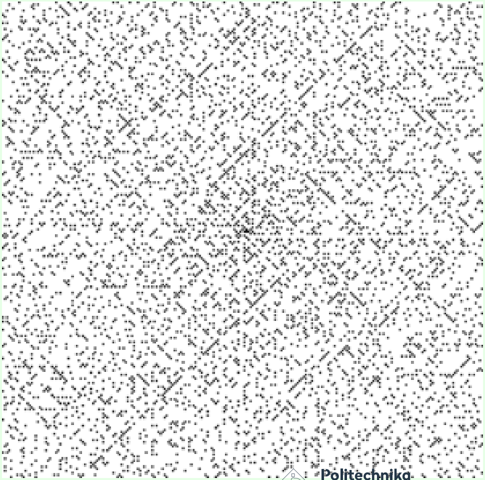
Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU



Rysunek: Spirala Ulama

Graficzna metoda pokazywania pewnych niewyjaśnionych do dziś prawidłowości w rozkładzie liczb pierwszych, zaproponowana przez polskiego matematyka Stanisława Ulama w 1963 roku.

Pewne prawidłowości



Rysunek: Spirala Ulama

Liczby pierwsze bliźniacze

Liczby pierwsze bliźniacze to takie liczby pierwsze, których różnica jest równa 2, tzn. liczby p i $p+2$ są pierwsze.

Liczby pierwsze bliźniacze

Liczby pierwsze bliźniacze to takie liczby pierwsze, których różnica jest równa 2, tzn. liczby p i $p+2$ są pierwsze.

3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 29 i 31, 41 i 43, 59 i 61, 71 i 73, 101 i 103, 107 i 109, 137 i 139, 149 i 151, 179 i 181, 191 i 193, 197 i 199, 227 i 229, 239 i 241, 269 i 271, 281 i 283, 311 i 313, 347 i 349, 419 i 421, 431 i 433, 461 i 463, 521 i 523, 569 i 571, 599 i 601, 617 i 619, 641 i 643, 659 i 661, 809 i 811, 821 i 823, 827 i 829, 857 i 859, 881 i 883, 1019 i 1021, 1031 i 1033, 1049 i 1051, 1061 i 1063, 1091 i 1093, 1151 i 1153, 1229 i 1231, 1277 i 1279, 1289 i 1291, 1301 i 1303, 1319 i 1321, 1427 i 1429, 1451 i 1453, 1481 i 1483, 1487 i 1489, 1607 i 1609, 1619 i 1621, 1667 i 1669, 1697 i 1699, 1721 i 1723, 1787 i 1789, 1871 i 1873, 1877 i 1879, 1931 i 1933, 1949 i 1951, 1997 i 1999, . . .

Największe znane dziś liczby bliźniacze (2016)

$2996863034895 \cdot 2^{1290000} \pm 1$ mają 200700 cyfr.

Największe znane dziś liczby bliźniacze (2016)

$2996863034895 \cdot 2^{1290000} \pm 1$ mają 200700 cyfr.

Hipoteza

Istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych bliźniaczych.

Największe znane dziś liczby bliźniacze (2016)

$2996863034895 \cdot 2^{1290000} \pm 1$ mają 200700 cyfr.

Hipoteza

Istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych bliźniaczych.

W 1966 roku Chen Jingrun udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Istnieje nieskończenie wiele par liczb $(p, p+2)$, takich że p jest liczbą pierwszą a liczba $p+2$ jest albo pierwszą albo jest iloczynem dwóch liczb pierwszych.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

W roku 2005 Green-Tao udowodnili twierdzenie:

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją skończenie długie, długości n ciagi arytmetyczne liczb pierwszych.

Terence Tao w 2006 roku uzyskał nagrodę Fieldsa.

Powyższe twierdzenie oznacza, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczba pierwsza p oraz liczba naturalna r, takie że:

$$p,\ p+r,\ p+2r,\ \ldots,\ p+(n-1)r$$

są liczbami pierwszymi.

Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych

Przykład

Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych

$$(3,5,7),\quad (3,7,11),\quad (5,11,17,23,29),\quad (5,23,41,59).$$

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Powyższe twierdzenie oznacza, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczba pierwsza p oraz liczba naturalna r, takie że:

$$p,\ p+r,\ p+2r,\ \ldots,\ p+(n-1)r$$

są liczbami pierwszymi.

Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych

Przykład

Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych

$$(3,5,7),\quad (3,7,11),\quad (5,11,17,23,29),\quad (5,23,41,59).$$

Znane są przykłady ciągów 25-wyrazowych i jeden 26-wyrazowy. Największa znana obecnie dwudziestoszeście elementowa sekwencja liczb spełniająca nasze twierdzenie zaczyna się od liczby 43142746595714191, ma różnicę między kolejnymi elementami równą 5283234035979900.

Powyższe twierdzenie oznacza, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczba pierwsza p oraz liczba naturalna r, takie że:

$$p,\ p+r,\ p+2r,\ \ldots,\ p+(n-1)r$$

są liczbami pierwszymi.

Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych

Przykład

Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych

$$(3,5,7),\quad (3,7,11),\quad (5,11,17,23,29),\quad (5,23,41,59).$$

Znane są przykłady ciągów 25-wyrazowych i jeden 26-wyrazowy. Największa znana obecnie dwudziestosześcio elementowa sekwencja liczb spełniająca nasze twierdzenie zaczyna się od liczby 43142746595714191, ma różnicę między kolejnymi elementami równą 5283234035979900. Jarosław Wróblewski odkrył w 2007 roku ciąg arytmetyczny liczb pierwszych 24-wyrazowy.

Hipoteza Goldbacha

Hipoteza

Każda liczba naturalna nieparzysta $n > 5$ jest sumą trzech liczb pierwszych.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Hipoteza Goldbacha, Eulera

Hipoteza Goldbacha

Hipoteza

Każda liczba naturalna nieparzysta $n > 5$ jest sumą trzech liczb pierwszych.

Hipoteza Eulera

Hipoteza

Każda liczba parzysta $n \geqslant 4$ jest suma dwóch liczb pierwszych.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Chen Jingrun udowodnił słabszą wersję hipotezy Goldbacha. Pokazał, że każdą liczbę naturalną parzystą większą od liczby 2 można przedstawić jako sumę dwóch liczb naturalnych, gdzie jeden składnik jest liczbą pierwszą, zaś drugi składnik sumy może być liczbą półpierwszą.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Chen Jingrun udowodnił słabszą wersję hipotezy Goldbacha. Pokazał, że każdą liczbę naturalną parzystą większą od liczby 2 można przedstawić jako sumę dwóch liczb naturalnych, gdzie jeden składnik jest liczbą pierwszą, zaś drugi składnik sumy może być liczbą półpierwszą.

Przykład

Hipoteza Eulera

$$18 = 5 + 13, \quad 32 = 3 + 29 = 13 + 19, \quad 36 = 17 + 19$$

.

Obliczeniowo pokazano, że hipoteza Eulera jest prawdziwa dla liczb mniejszych niż 10^{18}.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Tajemnice...

Tajemnice...

- Jaka jest sekwencja liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych?

Tajemnice...

- Jaka jest sekwencja liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych?
- Czy istnieje wzór, który pozwala wyliczać (nie koniecznie kolejne) tylko liczby pierwsze?

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Tajemnice...

- Jaka jest sekwencja liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych?
- Czy istnieje wzór, który pozwala wyliczać (nie koniecznie kolejne) tylko liczby pierwsze?
- Czy istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych bliźniaczych?

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Tajemnice...

- Jaka jest sekwencja liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych?
- Czy istnieje wzór, który pozwala wyliczać (nie koniecznie kolejne) tylko liczby pierwsze?
- Czy istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych bliźniaczych?
- Czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Fermata?

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Tajemnice...

- Jaka jest sekwencja liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych?
- Czy istnieje wzór, który pozwala wyliczać (nie koniecznie kolejne) tylko liczby pierwsze?
- Czy istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych bliźniaczych?
- Czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Fermata?
- Czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Mersenne'a?

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Tajemnice...

- Jaka jest sekwencja liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych?
- Czy istnieje wzór, który pozwala wyliczać (nie koniecznie kolejne) tylko liczby pierwsze?
- Czy istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych bliźniaczych?
- Czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Fermata?
- Czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Mersenne'a?
- Czy prawdziwa jest hipoteza Goldbacha, Eulera?

- Znaleźć algorytm szybko rozkładający liczbę całkowitą na iloczyn liczb pierwszych.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak zyskać sławę i zarobić milion dolarów?

- Znaleźć algorytm szybko rozkładający liczbę całkowitą na iloczyn liczb pierwszych.
- Udowodnić hipotezę Goldbacha.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak zyskać sławę i zarobić milion dolarów?

- Znaleźć algorytm szybko rozkładający liczbę całkowitą na iloczyn liczb pierwszych.
- Udowodnić hipotezę Goldbacha.
- Podać wzór wyliczający tylko liczby pierwsze.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Jak zyskać sławę i zarobić milion dolarów?

- Znaleźć algorytm szybko rozkładający liczbę całkowitą na iloczyn liczb pierwszych.
- Udowodnić hipotezę Goldbacha.
- Podać wzór wyliczający tylko liczby pierwsze.
- Udowodnić hipotezę Riemmena.

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Bibliografia

- P.Ribenboim *Mała księga wielkich liczb pierwszych* WNT, Warszawa 1997
- W.Bednarek *Tajemnicza hipoteza Riemanna i inne sekrety teorii liczb*, Tutor, Toruń 2008,
- M.Gardner, *Ostatnie Rozrywki*, rozdział 12, Prószyński i s-ka, Warszawa
- https://studylibpl.com/doc/579360/tajemnice-liczb-pierwszych

Politechnika Warszawska
FILIA W PŁOCKU

Dziękuję za uwagę.